

Kvadratsetningene

$$1: (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 2: (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad 3: (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Andregradslikningen^(*) $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$

Løsninger: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, så sant $b^2 - 4ac \geq 0$

Faktorisering: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ der x_1 og x_2 er løsninger av likningen^(*)

Topunktsformelen $y - y_1 = a(x - x_1)$ der $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

a er stigningstallet for linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .

Potensregning

$$\begin{array}{lll} a^0 = 1 & a^m \cdot a^n = a^{m+n} & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} & (a^m)^n = a^{m \cdot n} & a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \end{array}$$

Derivasjon

Potensregelen: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$$\begin{array}{ll} a) & f = k \cdot u \Rightarrow f' = k \cdot u' \quad (k \text{ er en konstant}) \\ b) & f = u + v \Rightarrow f' = u' + v' \\ c) & f = u - v \Rightarrow f' = u' - v' \\ d) & f = u \cdot v \Rightarrow f' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ e) & f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \end{array}$$

Her er f , u og v alle funksjoner av den samme variabelen.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$
så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ evt. $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Tangentlikning: $y - b = f'(a)(x - a)$ der (a, b) er tangeringspunktet.

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e : $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Naturlig logaritme: $y = \ln x$ er det tallet som e må opphøyes i for å gi x , dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

Regneregler for logaritmer: $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \quad \ln(e^x) = x$$

Derivasjon: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Integralregning

Ubestemt integral: $\int f(x) dx = F(x) + C$, der $F'(x) = f(x)$

Regneregler: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$, $n \neq -1$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Bestemt integral: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \left. F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{der } a \leq c \leq b$$

Finansmatematikk

- Sluttverdi av et beløp K_0 etter n perioder når r er rente pr periode: $K_n = K_0(1+r)^n$

- Nåverdi av et beløp K_n etter n perioder når r er rente pr periode: $K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$

- Oppsparingsannuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode.

Verdi umiddelbart etter siste betaling.

$$V = K \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\begin{aligned} V &= \text{sluttverdi} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

- Nåverdi av annuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling ved utgangen av første periode.

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{nåverdi} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

- Betaling av lån (annuitet). Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling én periode etter låneopptak.

$$K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{lånebeløp} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

Funksjoner av to variabler

Punkt der $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 0$ kalles *stasjonære punkt*.

Klassifisering av et stasjonært punkt (a, b) :

$$\text{La } A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(a,b)} = f''_{xx}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(a,b)} = f''_{yx}(a,b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(a,b)} = f''_{yy}(a,b)$$

og sett $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter:

1. $\Delta > 0$ og $A < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maksimum i (a, b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum i (a, b)
3. $\Delta < 0 \Rightarrow f$ har sadelpunkt i (a, b)
4. $\Delta = 0 \Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a, b)