Universitetet i Sørøst-Norge

12.12.2024

MET1000 Matematikk for økonomer

Skoleeksamen med tilsyn

Generell informasjon om eksamen

Emnekode: MET1000

Emnenavn: Matematikk for økonomer

Dato: 12.12.2024

Start klokkeslett: 09:00

Antall timer: 4

Emneansvarlige: Roy M. Istad (eksamensansvar), Gry Tengmark Østenstad,
Tor Martin Kvikstad, Sviatlana Lapaukhava Frog, Geir Bjarvin

Campus: Bø, Drammen, Kongsberg, Ringerike, Vestfold

Fakultet: HH

Antall oppgaver: 4

Antall vedlegg: 1

Totalt antall sider (inkludert forside og vedlegg): 8

Målform: Bokmål / Nynorsk

Tillatte hjelpemidler (jfr. emneplan): Godkjent kalkulator og vedlagt formelsamling.

Opplysninger om vedlegg: Formelsamling, 3 sider.

Merknader: Grunngi svarene. Alle de 10 delpunktene teller likt.

Ved eksamen på papir kryss av for type eksamenspapir: Ruter ☒ Linjer ☐

KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
12. 12. 2024

MET1000 - Matematikk for økonomer

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Vedlagt formelsamling og godkjent kalkulator
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

BOKMÅL

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $\quad f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = x(2x-3)^2$
Bestem nullpunktene til f.
Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjør hvor grafen til f er konkav, hvor den er konveks og hvor den har vendepunkt.
Skisser grafen til f.

d) Regn ut verdien: $\quad A = \int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 9x)\, dx$

A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) = e^{-x}$

ii) $g(x) = 1 + x + \dfrac{1}{x}$

iii) $h(x) = 2\ln(3x+4)$

b) De tre funksjonene f, g og h er gitt i punkt a):

i) Regn ut både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til g og den rette linja $y = x$.

iii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til h og koordinataksene.

Oppgave 3

a) Eline har satt i banken et beløp på 45 000 kr til 4 % årlig rente.

Hva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 10 år?

Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 60 000 kr?

Hva måtte det innsatte beløpet ha vært for at Eline skulle hatt 60 000 kr i banken etter 6 år med samme rente?

b) Elling har lånt 3 500 000 kr til kjøp av en leilighet. Renten på lånet er 6.5 % årlig. Lånet betales over 25 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Elling betaler på lånet?

Eva ønsker å kjøpe ei hytte om 8 år og vil spare til en egenandel på minst 400 000 kr. Hun vil betale inn et fast årlig beløp i en bank som gir 4 % årlig rente. Første betaling er om et år. Vil Eva nå målet sitt for egenandelen umiddelbart etter den 8. betalingen, dersom hun betaler inn 45 000 kr årlig?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = 4 + 3xy - 3x^2 - 3y$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(1,\ 2)$.

Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(1,\ 2)$.

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 3$.

EKSAMEN

12. 12. 2024

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

MET1000 - Matematikk for økonomar

Tid:	4 timar (09:00 - 13:00)
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Vedlagd formelsamling og godkjend kalkulator
Vekting:	Alle delspørsmål tel likt (10 % kvar)
Merknad:	Alle svar skal grunngjevast

NYNORSK

Oppgåve 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Vis at $f(x)$ kan skrivast som $f(x) = x(2x-3)^2$
Bestem nullpunkta til f.
Avgjer kor funksjonen er positiv og kor han er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjer om nokon av dei er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjer kor grafen til f er konkav, kor han er konveks og kor han har vendepunkt.
Skisser grafen til f.

d) Rekn ut verdien: $A = \displaystyle\int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 9x)\, dx$

A kan tolkast som storleiken på eit område. Merk av dette området på grafskissa.

Oppgåve 2

a) Deriver dei tre funksjonane:

i) $f(x) = e^{-x}$

ii) $g(x) = 1 + x + \dfrac{1}{x}$

iii) $h(x) = 2\ln(3x + 4)$

b) For dei tre funksjonane i punkt a)

i) Rekn ut både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjeringspunktet mellom grafen til g og den rette lina $y = x$.

iii) Finn skjeringspunkta mellom grafen til h og koordinataksane.

Oppgåve 3

a) Eline har sett i banken eit beløp på 45 000 kr til ei rente på 4 % årleg.

Kva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 10 år?

Kor mange år tar det før beløpet har vakse til 60 000 kr?

Kva måtte det innsette beløpet ha vore for at Eline skulle hatt 60 000 kr i banken etter 6 år med same rente?

b) Elling har lånt 3 500 000 kr til kjøp av ei leilegheit. Renta på lånet er 6.5 % årleg. Lånet betalast over 25 år med like store årlege beløp, første gong var eitt år etter låneopptaket. Kva er det årlege beløpet Elling betaler på lånet?

Eva ønsker å kjøpe ei hytte om 8 år og vil spare til ein eigenandel på minst 400 000 kr. Ho vil betale inn eit fast årleg beløp i ein bank som gir 4 % årleg rente. Første betaling er om eit år. Vil Eva nå målet sitt for eigenandelen umiddelbart etter den 8. betalinga, dersom ho betaler inn 45 000 kr årleg?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = 4 + 3xy - 3x^2 - 3y$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har berre eitt stasjonært punkt: $(1,\ 2)$.

Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(1,\ 2)$.

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 3$.

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Formelsamling til bruk ved eksamen i MET1000 - Matematikk for økonomer

Kvadratsetningene

1: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **2**: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **3**: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikningen$^{(*)}$ $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$

Løsninger: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, så sant $b^2 - 4ac \geqq 0$

Faktorisering: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ der x_1 og x_2 er løsninger av likningen$^{(*)}$

Topunktsformelen $y - y_1 = a(x - x_1)$ der $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

a er stigningstallet for linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Potensregning

$a^0 = 1$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Derivasjon

Potensregelen: $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$, uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$a)$ $f = k \cdot u \quad \Rightarrow \quad f' = k \cdot u'$ (k er en konstant)

$b)$ $f = u + v \quad \Rightarrow \quad f' = u' + v'$

$c)$ $f = u - v \quad \Rightarrow \quad f' = u' - v'$

$d)$ $f = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$e)$ $f = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Her er f, u og v alle funksjoner av den samme variabelen.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$
så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ evt. $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Tangentlikning: $y - b = f'(a)(x - a)$ der (a, b) er tangeringspunktet.

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $\quad f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e: $\quad f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Naturlig logaritme: $y = \ln x$ er det tallet som e må opphøyes i for å gi x, dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$$

Regneregler for logaritmer: $\quad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \qquad \ln(e^x) = x$$

Derivasjon: $\quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Integralregning

Ubestemt integral: $\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad$ der $\quad F'(x) = f(x)$

Regneregler:

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx}\,dx = \tfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bestemt integral: $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{der} \quad a \leqq c \leqq b$$

Finansmatematikk

- Sluttverdi av et beløp K_0 etter n perioder når r er rente pr periode: $K_n = K_0 (1+r)^n$

- Nåverdi av et beløp K_n etter n perioder når r er rente pr periode: $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+r)^n}$

- Oppsparingsannuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode.
  Verdi umiddelbart etter siste betaling.

$$V = K \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\begin{aligned} V &= \text{sluttverdi} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

- Nåverdi av annuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling ved utgangen av første periode.

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r\,(1+r)^n}$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{nåverdi} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

- Betaling av lån (annuitet). Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling én periode etter låneopptak.

$$K = K_0 \frac{r\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \text{lånebeløp} \\ K &= \text{fast betalt beløp} \\ r &= \text{rente pr. periode} \\ n &= \text{antall perioder} \end{aligned}$$

Funksjoner av to variabler

Punkt der $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x' = 0$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y' = 0$ kalles *stasjonære punkt.*

Klassifisering av et stasjonært punkt (a,b):

La $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(a,b)} = f_{xx}''(a,b)\,,\quad B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(a,b)} = f_{yx}''(a,b)\,,\quad C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(a,b)} = f_{yy}''(a,b)$

og sett $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter:

1. $\Delta > 0$ og $A < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maksimum i (a,b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum i (a,b)
3. $\Delta < 0 \Rightarrow f$ har sadelpunkt i (a,b)
4. $\Delta = 0 \Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a,b)