Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Funksjonsverditabell:

x	-1	0	1	2	3
y	-25	0	1	2	27

Resten er beregnet på kalkulator.

Regner ut én y-verdi detaljert: Ser på $x = -1$

$$y = f(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1)$$
$$= -4\cdot(-1) - 12\cdot 1 - 9 = -4 - 12 - 9 = \underline{\underline{-25}}$$

Vis at $f(x)$ kan skrives som

$$f(x) = x(2x-3)^2$$

Multipliser ut på høyresiden:

$$x(2x-3)^2 = x\cdot(2x-3)\cdot(2x-3)$$
$$= x\cdot(\,2x\cdot 2x - 3\cdot 2x\ - 3\cdot 2x\ - 3\cdot -3\,)$$
$$= x\cdot(4x^2 - 12x + 9) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$$
$$= f(x)\ \textbf{Ok!}$$

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt = 0 → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ $når$ $x(2x-3)^2 = 0$

eller: $x\cdot(2x-3)\cdot(2x-3) = 0$

$2x - 3 = 0$

altså $når$ $\underline{\underline{x = 0}}$ eller $når$ $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$

Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = x(2x-3)^2 = x\cdot(2x-3)\cdot(2x-3)$

Fortegnsskjema:

		0		$\frac{3}{2}$		x
x	- - - - - -	0	————		————	
$(2x-3)^2$	————		————	0	————	
$f(x)$	- - - - - -	0	————	0	————	
	f er $negativ$ $x < 0$	NP $x = 0$ $y = 0$	f er $positiv$ $0 < x < 1$	NP $x = \frac{3}{2}$ $y = 0$	f er $positiv$ $x > \frac{3}{2}$	

Evt. f er $positiv$ når $x > 0,\ x \neq \frac{3}{2}$

b) Bestem $f'(x)$. $\quad f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 12 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 9 \cdot 1 = \underline{\underline{12x^2 - 24x + 9}}$

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

Ekstrempkt.? $\quad f'(x) = 0\,? \quad 12x^2 - 24x + 9 \overset{?}{=} 0 \quad dvs.\ x = \dfrac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 9}}{2 \cdot 12}$

altså $x = \dfrac{24 \pm \sqrt{144}}{24} = \dfrac{24 \pm 12}{24}$ Da er $x = \dfrac{24+12}{24} = \dfrac{36}{24} = \dfrac{3}{2}$, eller $x = \dfrac{24-12}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

Fortegnsskjema:

x-akse: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$

$f'(x)$: ——— 0 - - - - - - - - - - 0 ———

f *vokser* $x < \frac{1}{2}$ | *lokalt max.* $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$ | f *avtar* $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ | *lokalt min.* $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$ | f *vokser* $x > \frac{3}{2}$

Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at $y = -25$ når $x = -1$, og er da mindre enn $y = 0$ i lokalt min. Videre er $y = 27$ når $x = 3$, og er da større enn $y = 2$ i lokalt max. Altså har <u>ikke</u> f noen globale ekstrempunkt.

c) Bestem $f''(x)$. $\quad f'(x) = 12x^2 - 24x + 9 \rightarrow f''(x) = 12 \cdot 2x^{2-1} - 24 \cdot 1 = \underline{\underline{24x - 24}}$

Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

Vendepunkt? $\quad f''(x) \overset{?}{=} 0 \rightarrow 24x - 24 = 0 \rightarrow 24x = 24$, dvs. $x = 1$

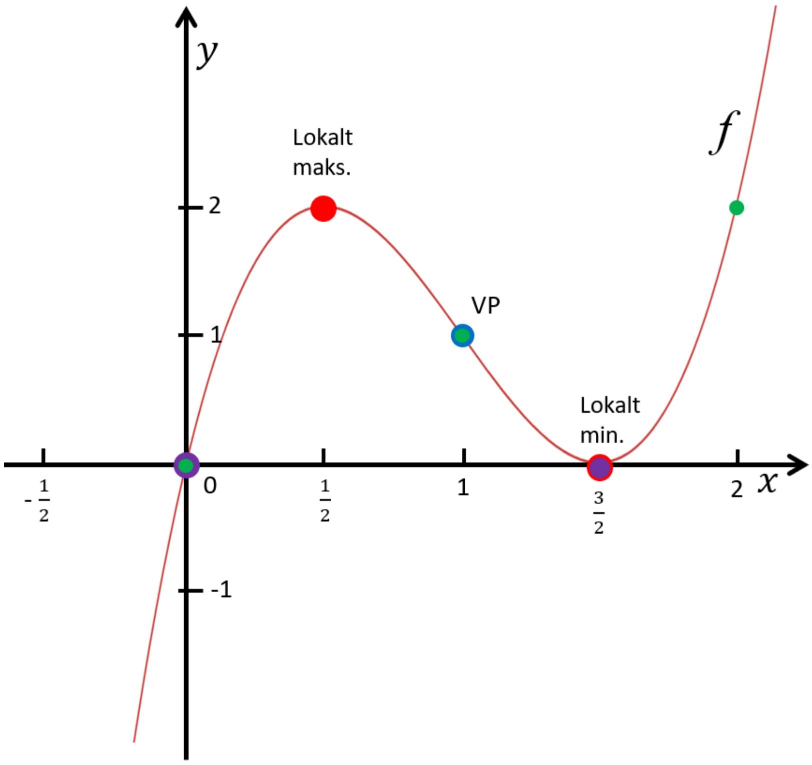
Fortegnsskjema

x-akse: 1

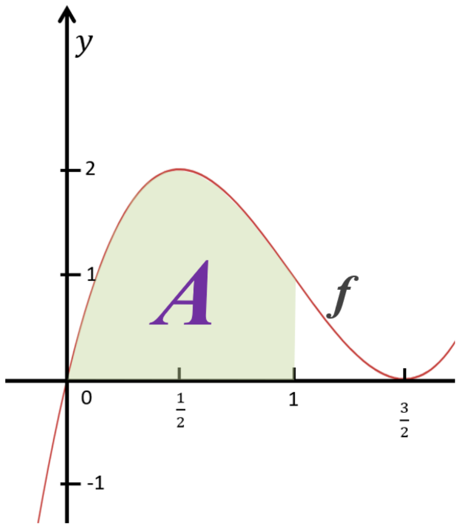
$f''(x)$: - - - - - - - - - - 0 ———

f *konkav* $x < 1$ | vendepunkt $x = 1$, $y = 1$ | f *konveks* $x > 1$

Skisser grafen til f



d) Regn ut verdien: $$A = \int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 9x)\,dx$$



$$A = \left[x^4 - 4x^3 + \tfrac{9}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \left(1^4 - 4 \cdot 1^3 + \tfrac{9}{2} \cdot 1^2 \right) - 0$$

$$= 1 - 4 + \frac{9}{2} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 9}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} = 1.5$$

A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) = e^{-x}$

ii) $g(x) = 1 + x + \frac{1}{x}$

iii) $h(x) = 2\ln(3x+4)$

i) $f'(x) = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = \underline{\underline{-e^{-x}}}$

ii) $g'(x) = (1)' + (x)' + (\frac{1}{x})'$

$= 0 + 1 - \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{x^2}}}$

iii) $h'(x) = 2 \cdot (\ln(3x+4))'$

$= 2 \cdot (\frac{1}{3x+4} \cdot (3x+4)')$

$= 2 \cdot (\frac{1}{3x+4} \cdot 3) = \frac{2\cdot 3}{3x+4} = \underline{\underline{\frac{6}{3x+4}}}$

b) De tre funksjonene f, g og h er gitt i punkt a):

i) Regn ut både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til g og den rette linja $y = x$.

iii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til h og koordinataksene.

i) $f(x) = e^{-x}$

$f(0) = e^{-0} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f'(0) = -e^{-0} = -e^0 = \underline{\underline{-1}}$

ii) $g(x) = 1 + x + \frac{1}{x}$

Skjæringspkt. mellom g og linja $y = x$:

(felles y-verdi når) $y = g(x) = x$

Dvs. $1 + x + \frac{1}{x} = x \quad | \cdot x$ (fordi $x \neq 0$)

Dvs. $x + x^2 + 1 = x^2$

Vi få da: $x + 1 = 0$

dvs. $\underline{\underline{x = -1}}$

iii) $h(x) = 2\ln(3x+4)$

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = h(0) = 2 \cdot \ln(3 \cdot 0 + 4) = \underline{\underline{2\ln 4}} \approx 2.77$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = h(x) = 2 \cdot \ln(3x+4) = 0$ NB! $2 \neq 0$

$\ln(3x+4) = 0 \quad | \; e^{(\,)}$ e og $\ln$ er motsatte regningsarter

$3x + 4 = e^0$

$3x = 1 - 4 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x, y) = (0, 2\ln 4)}}$ og $\underline{\underline{(x, y) = (-1, 0)}}$

Oppgave 3

a) Eline har satt i banken et beløp på 45 000 kr til 4 % årlig rente.

Hva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 10 år?

Sluttverdi etter 2 år: $K_2 = 45000 \cdot 1.04^2 = \underline{\underline{48\,672}}$

Sluttverdi etter 10 år: $K_{10} = 45000 \cdot 1.04^{10} = \underline{\underline{66\,611}}$

Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 60 000 kr?

Søker antall år n slik at: $K_n = 45000 \cdot 1.04^n = 60000 \quad \big| : 45000$

$$1.04^n = \frac{60000}{45000} = \frac{4}{3} \quad \big| \; ln(\,)$$

$$n \cdot ln\, 1.04 = ln\left(\frac{4}{3}\right) \longrightarrow n = \frac{ln\left(\frac{4}{3}\right)}{ln\, 1.04} \approx \underline{\underline{7.33}} \text{ (år)}$$

Hva måtte det innsatte beløpet ha vært for at Eline skulle hatt 60 000 kr i banken etter 6 år med samme rente?

Sluttverdi etter 6 år: $K_0 \cdot 1.04^6 = 60\,000$

Nåverdi av 60 000 om 6 år: $K_0 = \frac{60\,000}{1.04^6} = \underline{\underline{47\,418.87}}$

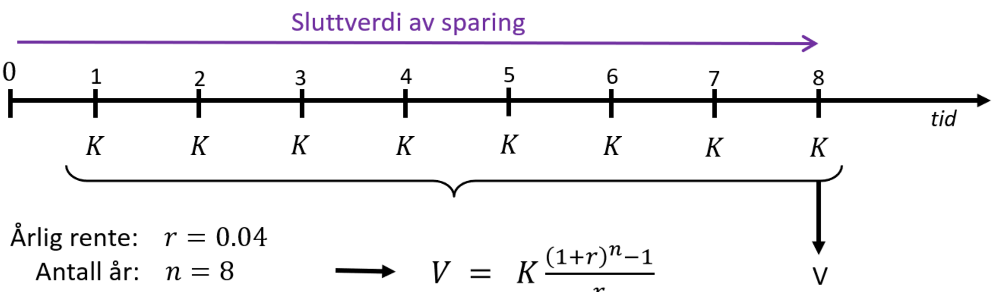
b) Elling har lånt 3 500 000 kr til kjøp av en leilighet. Renten på lånet er 6.5 % årlig. Lånet betales over 25 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Elling betaler på lånet?

Årlig betaling K (via låneformelen): $K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Lånet: $K_0 = 3\,500\,000$
Årlig rente: $r = 0.065$
Antall år: $n = 25$

Dvs. $K = 3\,500\,000 \cdot \frac{0.065 \cdot 1.065^{25}}{1.065^{25} - 1} = \underline{\underline{286\,935.18}}$

Eva ønsker å kjøpe ei hytte om 8 år og vil spare til en egenandel på minst 400 000 kr. Hun vil betale inn et fast årlig beløp i en bank som gir 4 % årlig rente. Første betaling er om et år. Vil Eva nå målet sitt for egenandelen umiddelbart etter den 8. betalingen, dersom hun betaler inn 45 000 kr årlig?



Årlig rente: $r = 0.04$
Antall år: $n = 8$
Årlig betaling: $K = 45\,000$

$$\longrightarrow \quad V = K\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Ja!

Sluttverdi av sparing: $V = 45\,000 \cdot \frac{1.04^8 - 1}{0.04} = 414\,640.18 > \underline{\underline{\text{Egenandelen}}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = 4 + 3xy - 3x^2 - 3y$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = 3y - 6x$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = 3x - 3$

2. orden: $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -6}_{A}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 3 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 3$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0}_{C}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(1,\ 2)$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 3y - 6x = 0 \xrightarrow{4} 3y - 6 \cdot 1 = 0 \xrightarrow{5} 3y = 6$, eller $y = 2$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = 3x - 3 = 0 \xrightarrow{1} 3x = 3 \xrightarrow{2} x = 1$

Altså, ett stp.pkt: $(1, 2)$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(1,2)$	-6	0	3	$-6 \cdot 0 - 3^2 = -9$ $(\Delta < 0)$	Sadelpunkt

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(1,\ 2)$.

$z = h(1,2) = 4 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 = 4 + 6 - 3 - 6 = 1$

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 3$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $y = 3 - x$

Setter inn for y (substituerer) i h:

$z = h(x,y) = h(x, 3-x) = 4 + 3x(3-x) - 3x^2 - 3(3-x)$

$= 4 + 9x - 3x^2 - 3x^2 - 9 + 3x = -6x^2 + 12x - 5 = g(x)$

$g'(x) = -12x + 12 = -12(x-1) = 0$, dvs. $x = 1 \longrightarrow y = 3 - x = 3 - 1$

dvs. $y = 2$

Minimum? Sjekk g'': $g''(x) = -12 < 0$, dvs. g er konkav og har maksimum

$g(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 5 = -6 + 12 - 5 = 1$ (kontroll)

Konklusjon - Maksimum for h under bibetingelsen: $z = h(1, 2) = 1$