Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Funksjonsverditabell:

x	-1	0	1	2	3
y	-24	0	0	0	24

Resten er beregnet på kalkulator.

Regner ut én y-verdi detaljert: Ser på $x = -1$

$$y = f(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1)$$
$$= -4\cdot(-1) - 12\cdot 1 - 8 = -4 - 12 - 8 = \underline{\underline{-24}}$$

Vis at $f(x)$ kan skrives som

$$f(x) = 4x(x-1)(x-2)$$

Multipliser ut på høyresiden:

$$4x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$
$$= 4x\cdot(\,x\cdot x - 1\cdot x\ - 2\cdot x\ - 1\cdot -2\,)$$
$$= 4x\cdot(x^2 - 3x + 2) \;=\; 4x^3 - 12x^2 + 8x$$
$$= f(x)$$ **Ok!**

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt $= 0$ → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ *når* $4x\cdot(x-1)\cdot(x-2) = 0$

altså *når* $\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = 1}}$, eller $\underline{\underline{x = 2}}$

Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = 4x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$

Fortegnsskjema:

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
$4x$	- - - -	0	——		——		——
$(x-1)$	- - - -		- - - -	0	——		——
$(x-2)$	- - - -		- - - -		- - - -	0	——
$f(x)$	- - - -	0	——	0	- - - -	0	——
	f er *negativ* $x<0$	NP $x=0$ $y=0$	f er *positiv* $0<x<1$	NP $x=1$ $y=0$	f er *negativ* $1<x<2$	NP $x=2$ $y=0$	f er *positiv* $x>2$

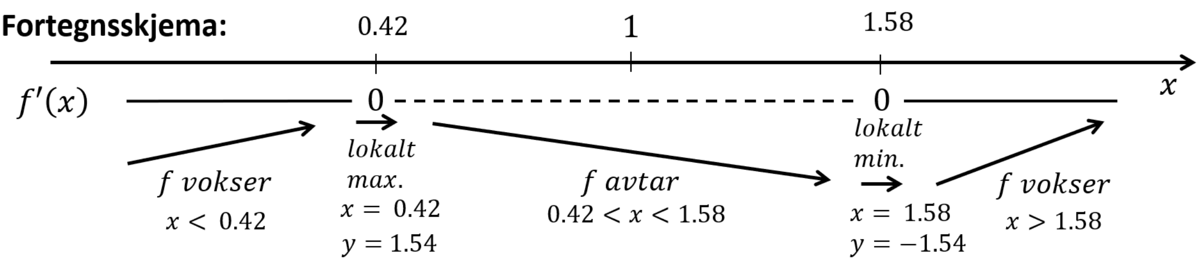
b) Bestem $f'(x)$. $\quad f'(x) = 4\cdot 3\cdot x^{3-1} - 12\cdot 2\cdot x^{2-1} + 8\cdot 1 = \underline{\underline{12x^2 - 24x + 8}}$

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

Ekstrempkt.? $f'(x) = 0$? $\quad 12x^2 - 24x + 8 \overset{?}{=} 0 \quad$ *dvs.* $x = \dfrac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4\cdot 12\cdot 8}}{2\cdot 12}$

altså $x = \dfrac{24 \pm \sqrt{192}}{24} = \dfrac{24 \pm 8\sqrt{3}}{24} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ Da er $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1.58$, eller $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0.42$

Fortegnsskjema:



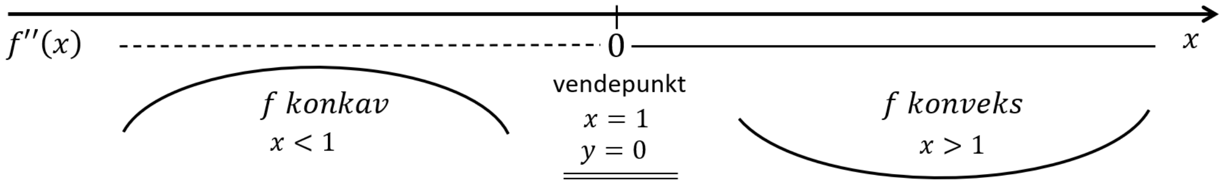
Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at $y = -24$ når $x = -1$, og er da mindre enn $y = -1.54$ i lokalt min. Videre er $y = 24$ når $x = 3$, og er da større enn $y = 1.54$ i lokalt max. Altså har <u>ikke</u> f noen globale ekstrempunkt.

c) Bestem $f''(x)$. $f'(x) = 12x^2 - 24x + 8 \rightarrow f''(x) = 12 \cdot 2x^{2-1} - 24 \cdot 1 = \underline{\underline{24x - 24}}$

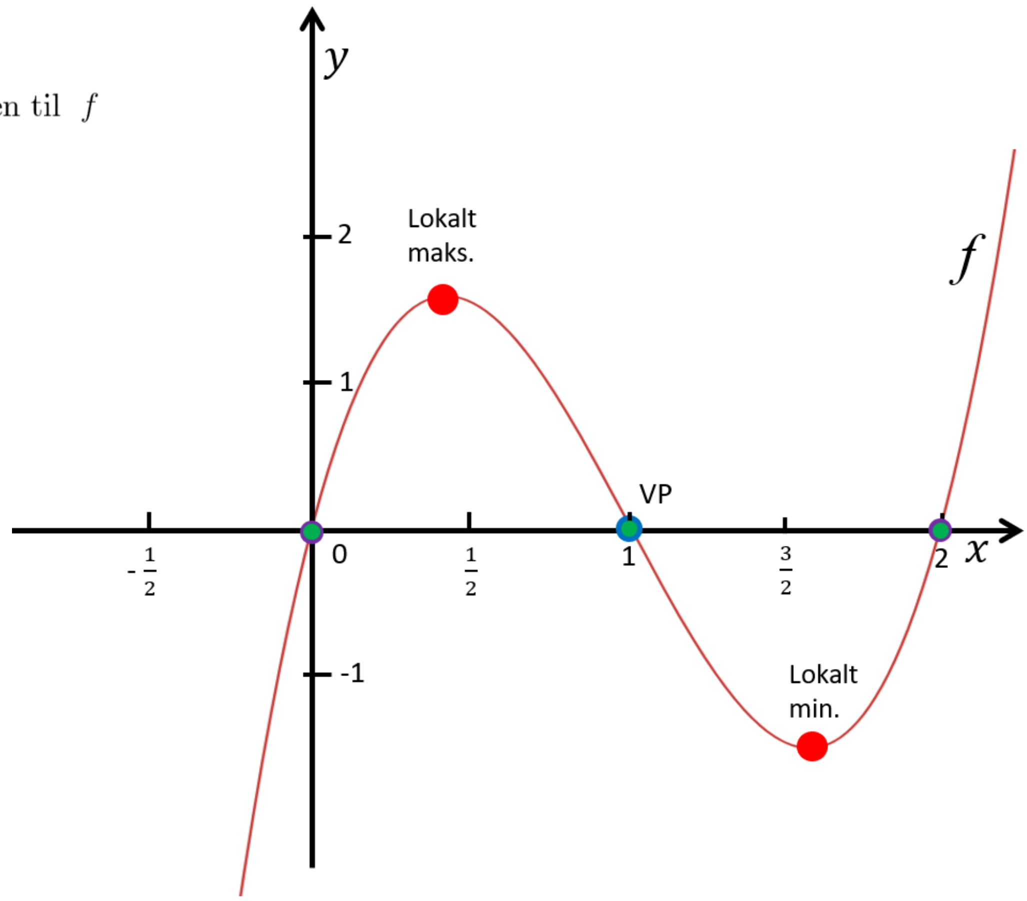
Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

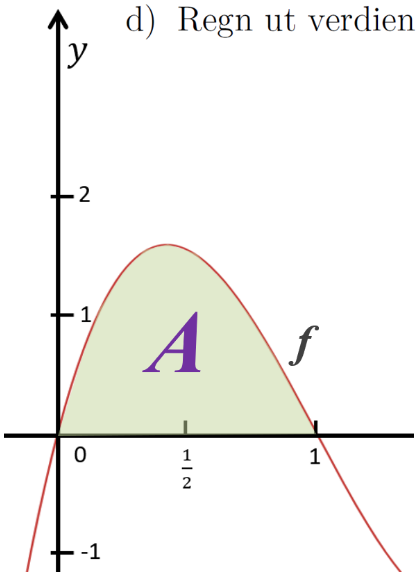
Vendepunkt? $f''(x) \overset{?}{=} 0 \rightarrow 24x - 24 = 0 \rightarrow 24x = 24,$ dvs. $x = 1$

Fortegnsskjema



Skisser grafen til f





d) Regn ut verdien: $A = \int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 8x)\,dx$

$$A = [x^4 - 4x^3 + 4x^2]_0^1$$

$$= (1^4 - 4\cdot 1^3 + 4\cdot 1^2) - 0$$

$$= 1 - 4 + 4 = \underline{\underline{1}}$$

A kan tolkes som størrelsen på et område.
Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) = e^{-2x}$

ii) $g(x) = \frac{2}{x} - x$

iii) $h(x) = 3\ln(2x+3)$

i) $f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2x)' = e^{-2x}\cdot(-2) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}$

ii) $g'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' - (x)' = 2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' - (x)'$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 1 = \underline{\underline{\frac{-2}{x^2} - 1}} = -\frac{x^2+2}{x^2}$$

iii) $h'(x) = 3\cdot(\ln(2x+3))'$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'\right)$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{2x+3}\cdot 2\right) = \frac{3\cdot 2}{2x+3} = \underline{\underline{\frac{6}{2x+3}}}$$

b) De tre funksjonene f, g og h er gitt i punkt a):

i) Regn ut både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til g og den rette linja $y = x$.

iii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til h og koordinataksene.

i) $f(x) = e^{-2x}$

$f(0) = e^{-2\cdot 0} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$f'(0) = -2e^{-2\cdot 0} = -2\cdot e^0 = \underline{\underline{-2}}$

ii) $g(x) = \frac{2}{x} - x$

Skjæringspkt. mellom g og linja $y = x$:

(felles y-verdi når) $y = g(x) = x$

Dvs. $\frac{2}{x} - x = x \quad |\cdot x$ (fordi $x \neq 0$)

Dvs. $2 - x^2 = x^2$

Vi få da: $2x^2 - 2 = 0 \quad | : 2$

eller: $x^2 - 1 = 0$

dvs. $\underline{\underline{x = -1\text{, eller } x = 1}}$

iii) $h(x) = 3\ln(2x+3)$

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = h(0) = 3 \cdot \ln(2 \cdot 0 + 3) = \underline{\underline{3\ln 3}} \approx 3.3$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = h(x) = 3 \cdot \ln(2x+3) = 0$

$$\ln(2x+3) = 0 \quad \Big| \; e^{(\;)}$$

e og $\ln$ er motsatte regningsarter

$$2x + 3 = e^0$$

$$2x = 1 - 3 \;\rightarrow\; 2x = -2 \;\rightarrow\; \underline{\underline{x = -1}}$$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x,y) = (0, 3\ln 3)}}$ og $\underline{\underline{(x,y) = (-1, 0)}}$

Oppgave 3

a) Fanny har satt i banken et beløp på 60 000 kr til 4 % årlig rente.

Hva er verdien av beløpet etter 3 år og etter 8 år?

Sluttverdi etter 3 år: $K_2 = 60000 \cdot 1.04^3 = \underline{\underline{67\,492}}$

Sluttverdi etter 8 år: $K_8 = 60000 \cdot 1.04^8 = \underline{\underline{82\,114}}$

Hva måtte årlig rente ha vært for at beløpet skulle vokse til 100 000 kr på 8 år?

Søker årlig rente r slik at: $K_8 = 60000 \cdot (1+r)^8 = 100000 \;\Big|\; : 60000$

$$(1+r)^8 = \frac{100000}{60000} = \frac{5}{3} \quad \Big| \; \sqrt[8]{\;} = (\;)^{\frac{1}{8}}$$

$$1 + r = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{8}} \;\longrightarrow\; r = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 \approx \underline{\underline{0.066}}$$

(Dvs. ca. 6.6 % årlig rente)

Hva måtte det innsatte beløpet ha vært for at Fanny skulle hatt 100 000 kr i banken etter 8 år med samme rente (dvs. 4 % årlig)?

Sluttverdi etter 8 år: $K_0 \cdot 1.04^8 = 100\,000$

Nåverdi av 100 000 om 8 år: $K_0 = \frac{100\,000}{1.04^8} = \underline{\underline{73\,069}}$

b) Filip har lånt 4 000 000 kr til kjøp av bolig. Renten på lånet er 7 % årlig. Lånet skal betales over 30 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Filip betaler på lånet?

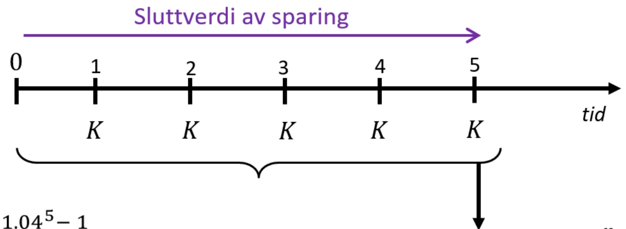
Årlig betaling K (via låneformelen): $K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Lånet:} & K_0 = 4\,000\,000 \\ \text{Årlig rente:} & r = 0.07 \\ \text{Antall år:} & n = 30 \end{array} \right.$$

Dvs. $K = 4\,000\,000 \cdot \frac{0.07 \cdot 1.07^{30}}{1.07^{30} - 1} = \underline{\underline{322\,345.61}}$

Fia vil spare til kjøp av ny bil for 500 000 kr om 5 år. Hun vil betale inn et fast årlig beløp i en bank som gir 4 % årlig rente. Første betaling er om ett år. Hva er det årlige beløpet som Fia må betale for å nå sparemålet sitt umiddelbart etter den 5. betalingen?

Årlig rente: $r = 0.04$
Antall år: $n = 5$
Årlig betaling: K
Sluttverdi: $\mathrm{V} = 500000$



$$V = K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Sluttverdi av sparing: $500000 = K \cdot \frac{1.04^5 - 1}{0.04}$

Dvs. $K = 500000 \cdot \frac{0.04}{1.04^5 - 1} = \underline{\underline{92\,313.56}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = 2y + 2x^2 - 2xy + 1$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = 4x - 2y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = 2 - 2x$

2. orden: $\underset{A}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 4}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -2 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -2$, $\underset{C}{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(1,\ 2)$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x - 2y = 0 \xrightarrow{4} 4 \cdot 1 - 2y = 0 \xrightarrow{5} 2y = 4, \text{ eller } y = 2$$

og

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2 - 2x = 0 \xrightarrow{1} 2x = 2 \xrightarrow{2} x = 1 \xrightarrow{3} \text{(inn i } \tfrac{\partial h}{\partial x} = 0)$$

Altså, ett stp.pkt: $(1,2)$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(1,2)$	4	0	-2	$4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4$ ($\Delta < 0$)	Sadelpunkt

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(1,\ 2)$.

$$z = h(1,2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 = 4 + 2 - 4 + 1 = 3$$

Bestem minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $2x + y = 1$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $y = 1 - 2x$

Setter inn for y (substituerer) i h:

NB! St.pkt. er ikke på bibetingelsen

$$z = h(x,y) = h(x, 1-2x) = 2(1-2x) + 2x^2 - 2x(1-2x) + 1$$
$$= 2 - 4x + 2x^2 - 2x + 4x^2 + 1 = 6x^2 - 6x + 3 = \boldsymbol{g(x)}$$

$g'(x) = 12x - 6 = 0$, dvs. $12x = 6$ og $x = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $y = 1 - 2x = 1 - 1$

dvs. $y = 0$

Minimum? Sjekk g'': $g''(x) = 12 > 0$, dvs. g er konveks (for alle x) og har da minimum.

$$g(\tfrac{1}{2}) = 6 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 - 6 \cdot (\tfrac{1}{2}) + 3 = \frac{6}{4} - \frac{6}{2} + 3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Konklusjon - Minimum for h under bibetingelsen: $z = h(\frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{2}$